Chapitre I

Grandeur scalaires, grandeurs vectorielles, différentielles, différentielles vectorielles et équations différentielles

I. Introduction

Une affirmation scientifique est une affirmation adhéré, prouvée comme vraie et accepté de manière universelle et internationale (Exemple : la physique est la même partout quelque soit le pays ou la langue).

Une preuve correspond à une expérience reproductible, c'est à dire une expérience qui peut se refaire n'importe où et par n'importe qui et qui fournira les mêmes résultats.

A partir de ces faits, on en dégage des lois qui ne sont rien d'autre que des généralisations, et à partir de ces lois, on en fait des raisonnements logiques qui part d'une situation pour en arriver à une autre qui est prédictive . Mais alors, si on le prédit, on peut faire une expérience où il en résultera ce qui a été prédit. Si cela est vérifié, alors, c'est une preuve scientifique.

En conclusion : à partir de faits, on en dégage des lois, qui permettent des raisonnements, qui permettent de prévoir des résultats, puis ont vérifie ces prédictions par une expérience et si le tout est vérifié, alors, nous avons une preuve scientifique.

II. Premier exemple : la vitesse

1. Position d'un mobile

Pour repérer un mobile dans l'espace, il nous faut :

- L'observateur qui repère que l'on notera O
- Le mobile que l'on observe qui sera noté M

On repère alors : une direction définie par la droite OM, un sens de O vers M et une distance OM. Tout ceci nous est fourni par l'outil mathématique : $\overrightarrow{OM}$ (La distance que l'on nomme intensité en physique correspond au module $\|\overrightarrow{OM}\|$).

$\overrightarrow{OM}$ est alors appelé le vecteur position

Un vecteur unitaire est défini comme suit : $\overrightarrow{U}_{om}=\dfrac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ il possède les informations suivantes : direction de $\overrightarrow{OM}$, même sens et de module 1. Il porte alors donc toute l'information vectorielle du vecteur position sauf la distance. Alors :

$\overrightarrow{OM}=\|\overrightarrow{OM}\|\overrightarrow{U}_{om}$ et de plus : $OM=\|\overrightarrow{OM}\|$ donc en écriture courante : $\overrightarrow{OM}=OM\,\overrightarrow{U}_{om}$

Une autre solution consiste à utiliser un repère (O; x; y; z) orthonormé (c'est à dire que le repère forme un trièdre trirectangle directe avec chaque vecteur unitaire possédant le même module) pour décrire la position de M en fonction toujours, de l'observateur, soit ici du centre du repère. Cela nous donne :

$$M\,(x\,;y\,;z)$$
$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$$

x, y et z dont aussi les projections de $\overrightarrow{OM}$ sur les axes $\vec{ox}\,;\vec{oy}\,;\vec{oz}$ qui sont aussi les composantes du vecteur $(O\,;\vec{u}_x\,;\vec{u}_y\,;\vec{u}_z)$

2. L'horloge et la vitesse

Pour définir une vitesse, il faut d'abord définir une horloge. A partir de cette horloge, on peut calculer la vitesse moyenne qui est : $v_{moy} = \frac{MM'}{t'-t}$. Cependant, cela ne nous informe pas sur la direction et le sens de la vitesse ; alors pour parer à cela, nous pouvons travailler avec le vecteur vitesse moyenne entre les points M et M' se définissant comme suit : $\overrightarrow{y_{moy}} = v_{moy}\,\overrightarrow{u_{MM'}}$

Ceci est alors une représentation graphique de la vitesse.

En conclusion, nous pouvons dire que la vitesse $\vec{v}$ est une grandeur vectorielle possédant une direction, un sens et une intensité, opposée à une grandeur scalaire qui n'a ni direction, ni sens mais uniquement une intensité.

Voici quelques exemples de grandeur scalaires et vectorielles :

- Grandeur scalaire : temps, masse, longueur, travail, tension électrique
- Grandeur vectorielle : poids, vitesse, champs électrique, forces, accélération

3. Différentielle

a. Définition de la vitesse instantanée

A partir de la formule de la vitesse moyenne, nous pouvons en déduire la formule de la vitesse instantanée en un point donné :

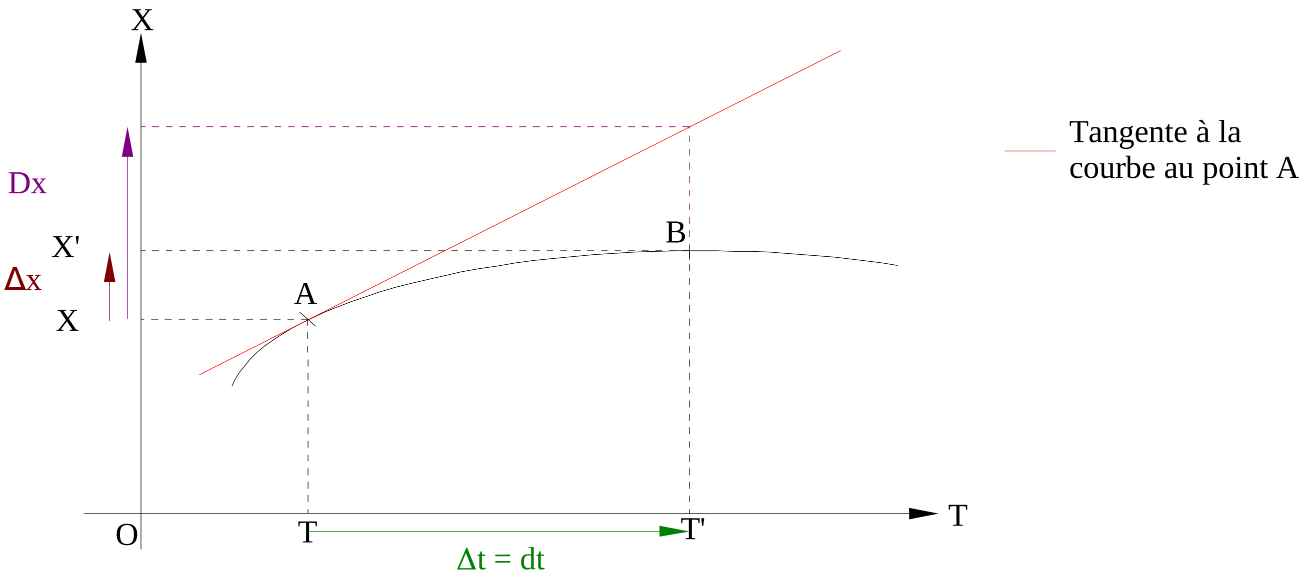
$$\overrightarrow{v_{moy}} = \frac{MM'}{t'-t} \times \frac{\overrightarrow{MM'}}{MM'} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{t'-t} = \frac{\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OM'}}{t'-t} = \frac{\overrightarrow{OM'}-\overrightarrow{OM}}{t'-t}$$

$$\overrightarrow{v_{moy}} = \frac{x'-x}{t'-t}\vec{u}_x + \frac{y'-y}{t'-t}\vec{u}_y + \frac{z'-z}{t'-t}\vec{u}_z$$

$$\lim_{t' \to t} \overrightarrow{v_{moy}} = \vec{v}$$

b. Rappel de calcul approximatif de la vitesse instantanée

Pour comprendre comment calculer approximativement une valeur de la vitesse instantanée, prenons un exemple de trajectoire dans un repère à deux dimensions.



Dans ce cas là, la vitesse moyenne entre les points A et B sera :

$\overrightarrow{v}_{moy} = \frac{x' - x}{t' - t}$ et donc $v_{moy} = \frac{x' - x}{t' - t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (x est une fonction de t qui en est la variable, soit x(t)).

Par conséquent, pour calculer la vitesse instantanée au point A :

$\frac{x' - x}{t' - t}$ qui correspond à la pente de la tangente à la courbe au point A

mais comme $t' \to t$, alors $\Delta t \to 0$ donc $B \to A$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t)$$

Pour confirmer cela, il suffit de prendre un exemple de mathématique :

$$f(x) = x^3$$
$$\Delta f = f(x + \Delta x)^3 - f(x)$$
$$\Delta f = (x + \Delta x)^3 - x^3$$
$$\Delta f = x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3$$
$$\Delta f = 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3$$
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \Delta x + \Delta x^2$$

Donc comme $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x^2$ alors si Δx est petit, on a : $\frac{\Delta f}{\Delta x} \simeq f'(x)$

c. Définition de la différentielle

! On appelle application linéaire tangente ou encore différentielle de f, l'application qui, à un accroissement dx quelconque fait correspondre l'accroissement df mesuré non pas sur la courbe mais sur la tangente à la courbe au point d'abscisse x.

Par définition : $df = f'(x)\,dx$

Alors : si Δx est petit, on a : $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \simeq f'(x) = \dfrac{df}{dx}$

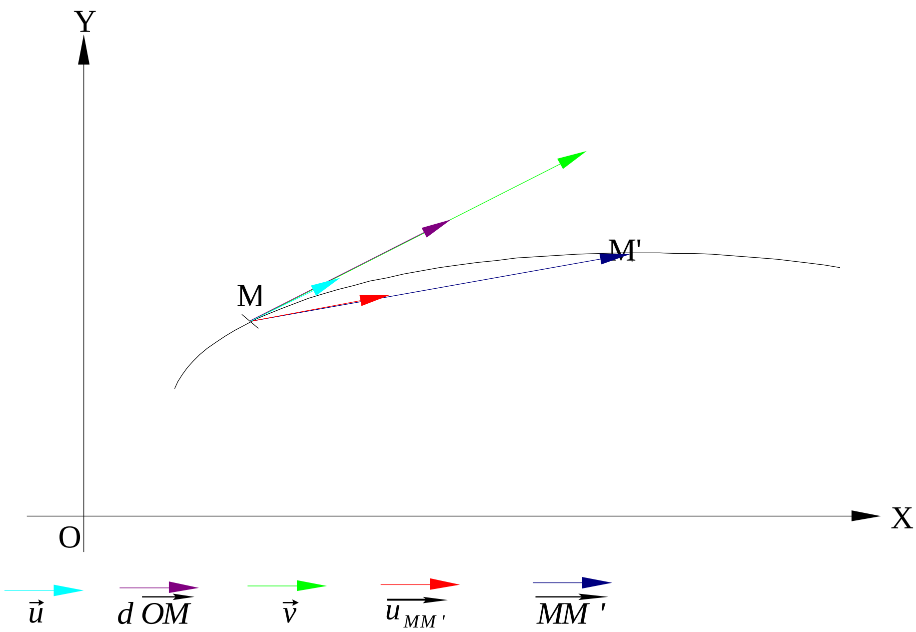
Donc : $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ et $v_y = \dfrac{dy}{dt}$ et $v_z = \dfrac{dz}{dt}$ alors $\vec{v} = \dfrac{dx}{dt}\vec{u_x} + \dfrac{dy}{dt}\vec{u_y} + \dfrac{dz}{dt}\vec{u_z}$

Donc $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta(\overrightarrow{OM})}{\Delta t} = \dfrac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}$. Nous avons alors là la dérivée d'un vecteur.

Nous définissons donc une différentielle vectorielle $\overrightarrow{OM}$ comme suit :

$$\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{u_x} + \frac{dy}{dt}\vec{u_z} + \frac{dz}{dt}\vec{u_z}$$

$$d\,\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{u_x} + dy\,\vec{u_z} + dz\,\vec{u_z}$$



La différentielle vectorielle de $\overrightarrow{OM}$: $d\,\overrightarrow{OM}$ est portée par la tangente à la trajectoire en M. $d\,\overrightarrow{OM}$ est dans le sens du mouvement (si $dt > 0$) et ayant M comme point d'application.

III. Second exemple : la décroissance radioactive

1. Établissement d'une équation différentielle

Une équation différentielle peut être comparé au principe de causalité. En effet, ce dernier dit

: les mêmes causes donnent les mêmes effets. Une équation différentielle traduit alors mathématiquement le principe de causalité.

La radioactivité peut être décomposé en trois classes :

- ✔ α : radioactivité par expulsion d'un noyau d'hélium
- ✔ β : radioactivité par expulsion d'un neutron ou d'un positon
- ✔ γ : radioactivité par expulsion d'un rayonnement de photon

Ils ont tous les trois la même probabilité de se désintégrer par seconde.

Soit :

λ : la probabilité de désintégration par seconde

Δt : le temps pendant lequel on observe la désintégration

$N(t) \simeq N \lambda \Delta t$: le nombre de désintégration

Alors :

λΔt = probabilité de désintégration pendant Δt

$$N(t+\Delta t) = N(t) - N(t) \lambda \Delta t$$
$$\Delta N = N(t+\Delta t) - N(t) \simeq -\lambda N(t) \Delta t$$
$$\frac{\Delta N}{\Delta t} \simeq -\lambda N(t)$$
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N(t)$$

donc : $N'(t) = \frac{dN}{dt} = -\lambda N(t)$

Il faut alors faire l'approximation que N est un nombre réel très grand.

Une autre solution aurait été de passer par les différentielles comme ci :

$$dt : \lambda\, dt$$
$$N(t) : \lambda\, dt N(t)$$
$$dN = -\lambda N(t) dt$$

2. Dérivation de quelques fonctions

Fonction primitive	***Dérivé de la fonction***	***Différentielle***
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha x^{\alpha-1} dx$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x) dx$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\sin(x) dx$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)$ ou $\frac{1}{\cos^2(x)}$	$1+\tan^2(x) dx$ ou $\frac{dx}{\cos^2(x)}$
e^x	e^x	$e^x dx$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{dx}{x}$

Fonction primitive	*Dérivé de la fonction*	*Différentielle*
uv	$u'v+uv'$	$vdu+udv$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\frac{vdu-udv}{v^2}$
$f\left[u(x)\right]$	$u'(x)f_x'\left[u(x)\right]$	$\frac{df}{du}\frac{du}{dx}$

3. Résolution de l'équation différentielle

Maintenant que l'on a trouvé l'équation différentielle et que nous avons revu quelques dérivations de fonction, il ne reste plus qu'a résoudre cette équation. Pour ce faire, nous avons deux techniques de résolution :

1ère technique :

$$dN=-\lambda N\,dt$$
$$\frac{dN}{N}=-\lambda\,dt$$
$$\int_{t=0}^{t}\frac{dN}{t}=\int_{t=0}^{t}-\lambda\,dt \quad \text{(correspond à l'évolution du système)}$$
$$\int_{t=0}^{t}-\lambda\,dt=\int_{t}-\lambda\,dt-\int_{t=0}-\lambda\,dt$$
$$\int_{t=0}^{t}-\lambda\,dt=-\lambda t-(-\lambda\times 0)=-\lambda t$$
$$\int_{t=0}^{t}\frac{dN}{N}=\ln\left[N(t)-\ln N(t=0)\right]=-\lambda t$$
$$\ln\frac{N(t)}{N(0)}=-\lambda t \ \text{ donc } \ \frac{N(t)}{N(0)}=e^{-\lambda t}$$

Donc : $N(t)=N(0)e^{-\lambda t}$

2ère technique :

$$\frac{dN}{N}=-\lambda\,dt$$
$$\int\frac{dN}{N}=\int-\lambda\,dt+C$$
$$\ln N=-\lambda t+C$$
$$N(t)_{t=0}=N(0) \ \text{ donc } \ \ln N(0)=C \ \text{ donc}$$
$$\ln N=-\lambda t-\ln N(0)$$
$$\ln\frac{N(t)}{N(0)}=-\lambda t$$
$$N(t)=N(0)e^{-\lambda t}$$

! Attention : ne pas oublier de calculer la constante !!

4. Propriété de la fonction exponentielle

Maintenant que nous avons résolu l'équation différentielle, nous allons pouvoir nous servir du résultat pour rechercher des grandeurs physiques comme par exemple la période dont la définition est : $T : N(t+T) = \frac{N(t)}{2}$

A quoi correspond alors la période T ?

$$N(t+T) = N(0)e^{-\lambda(t+T)}$$
$$N(t+T) = N(0)e^{-\lambda t}e^{-\lambda T}$$
$$N(t+T) = N(t)e^{-\lambda T}$$

Donc : $e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$

$$-\lambda T = \ln \frac{1}{2}$$
$$-\lambda T = -\ln 2$$

Par conséquent : $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$

La possession de la période permet d'utiliser les éléments radioactifs comme horloge naturelle (Comme le carbone 14). En particulier, le carbone 14 est très utile aux scientifique, puisqu'il permet de dater avec précision de la matière qui a été vivante, selon la quantité de carbone 14 qu'il reste.

IV. Conclusion

Ce chapitre d'introduction de la physique pour les classes de DEUG Sciences de la Matière 1ère année a permit d'introduire des outils mathématiques de base nécessaire à la compréhension et à la poursuite de l'étude de la physique. Nous y avons revu les différents types de grandeur (scalaires, vectorielles), les différentielles, les différentielles vectorielles, le travail sur les vecteurs, la mise en équation différentielle, la résolution d'une équation différentielle de premier degré et enfin l'utilisation du résultat de l'équation différentielle.

